

回焊炉内温度控制的研究——基于热传导方程

摘要

在回流焊工艺中，正确设置炉温曲线对于保证焊接质量至关重要。本文旨在探究炉温曲线形成的原理，并通过控制小温区温度和过炉速度得到所需求的炉温曲线。

问题一要求给出指定小温区温度和传送带过炉速度下的炉温曲线。本文通过建立热传导偏微分方程研究炉前区域以及温区间隙的温度分布，并在此基础上利用热传导方程刻画焊接区域温度随时间的变化。此时描述的焊接区域温度含有两个未知参数，本文使用附件中所提供的实验数据倒推参数：本文将两个未知参数在一定的范围内取分点，并把分点组合代入隐式差分格式的焊接区域的热传导方程，计算出一组炉温数据，并分析它与实验数据的误差，本文寻找误差的最小点，并将分点网格逐渐加细，最终在细分的网格中找到最优的参数组合作为未知参数的合理估计。在获得参数的估计值后，再次代入隐式差分格式的焊接区域的热传导方程，即得到问题一条件下的炉温曲线。

问题二引入了制程界限的概念：在回焊炉电路板焊接生产中，炉温曲线应满足一定的要求，包括温度上升、下降斜率的范围、温度上升过程中在 150°C – 190°C 时间的范围、温度超过 217°C 时间的范围、峰值温度的范围，并要求给出在指定小温区温度下，可以满足制程界限的最大过炉速度。问题二是一个有若干约束条件的最优化问题。本文将过炉速度在指定范围内取分点，并将分点代入隐式差分格式的焊接区域的热传导方程，得到一组炉温曲线，判断其是否满足制程界限，最终求得最大的可行速度。

问题三对焊接工艺提出了更高的要求：理想的炉温曲线应使超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小。当各个小温区的温度确定时，可以分析出过炉速度越快，该面积越小，因此本文将该题转化为在给定小温区温度的条件下求速度的最大值，即问题二所描述的内容，并在指定范围内变动小温区的温度，以寻找全局的最优解，最终根据最优解的小温区温度和过炉速度计算出炉温曲线，并计算出相应的面积。

问题四则要求以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称。为此，本文计算 217°C 以上数据的偏度。在小温区温度给定时，对于范围内的每一个过炉速度，均可计算出一条炉温曲线，从而利用 217°C 以上的数据计算出一个偏度。令小温区温度在指定范围内变动，本文寻找满足制程界限下绝对值最小的偏度，并利用该偏度对应的小温区温度和过炉速度计算出炉温曲线。

关键字： 热传导方程 最优化 回焊炉 隐式差分法

一、问题重述

1.1 问题的背景

电子制造行业中印刷电路板（PCB）回流焊工艺是 SMT 技术重要的一环^[1]，该工艺需要将安装有各种电子元件的印刷电路板放置在回焊炉中，通过加热，将电子元件自动焊接到电路板上。回流焊温度曲线实时记录焊接过程温度的变化，印刷电路板上的温度过高会对元件造成损坏，而温度不足又会造成焊接缺陷，因此正确设置回流焊温度曲线，是保障焊接质量的前提^[2]。目前，这方面的许多工作是通过实验测试来进行控制和调整的，而本题旨在通过机理模型来进行分析研究。

1.2 问题的提出

已知某回焊炉内有 11 个小温区及炉前区域和炉后区域，且其规格已知：每个小温区长度为 30.5cm，相邻小温区之间有 5cm 的间隙，炉前区域和炉后区域长度均为 25cm。回焊炉启动后，每个小温区内空气的温度会迅速加热至稳定状态，而炉前区域、炉后区域以及小温区之间的间隙的温度与相邻温区的温度有关，生产车间的温度保持在 25°C。焊接区域的厚度为 0.15mm，温度传感器在焊接区域中心的温度达到 30°C 时开始工作，电路板进入回焊炉开始计时。附件中给出了一次实验中炉温曲线（即焊接区域中心温度曲线）的数据，以及该实验中各温区设定的温度和传送带的过炉速度。

在第一问中，已知了过炉速度和各温区温度的设定值，需要给出该条件下对应的炉温曲线以及一些时点的具体数据。我们的思路是利用热传导方程来描述温度的变化，但焊接区域满足的热传导方程存在未知参数。我们利用实验数据倒推参数，从而获得第一问中的炉温曲线。

在第二问中，已知了各温区温度的设定值，并且要求满足五个制程界限，在此基础上需要求出过炉速度的最大值。这是一个最优化问题，我们将过炉速度以小步长取分点，对于每个过炉速度，利用热传导方程的隐式差分格式描述温度的变化，得出温度在过程中的一组值，并判断是否满足制程界限。将不满足制程界限的过炉速度舍去，剩余的最大过炉速度即是我们所求的。

在第三问中，要求炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小。这同样是一个最优化问题，并且我们分析得在给定小温区温度的条件下，过炉速度越快，该面积越小。因此第三问可转化为求全局的最大过炉速度，从而可以借助第二问的方法完成求解。

在第四问中，要求以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称。

为了判断对称性，我们首先想到利用偏度这个概念，第四问也即在满足制程界限的前提下寻找绝对值最小的偏度，以及它对应的炉温曲线。

二、模型的假设

- 炉前区域、温区间隙的空气，以及焊接区域的电路板都是均匀的；
- 炉前区域、小温区、温区间隙同一竖直线上的空气认为温度是相同的；
- 焊接区域的热交换能力与温度相关，在一定的温度范围内认为是常数；
- 传送带运行平稳，过炉速度在一次工作中认为是常数；
- 焊接区域、炉内空气的初始温度为室温。

三、符号说明

| 符号 | 意义 |
|---------------|----------------------|
| $v(x, t)$ | 炉前区域温度 |
| $w(x, t)$ | 温区间隙温度 |
| T_1 | 间隙左温区温度 |
| T_2 | 间隙右温区温度 |
| $u(x, t)$ | 焊接区域温度 |
| Q | 计算数据与实验数据误差的平方和 |
| s | 过炉速度 |
| $upslope_s$ | 基于过炉速度 s 的最大温度上升斜率 |
| $downslope_s$ | 基于过炉速度 s 的最小温度下降斜率 |
| $peaktemp_s$ | 基于过炉速度 s 的峰值温度 |
| $temp_1$ | 小温区 1-5 的温度 |
| $temp_2$ | 小温区 6 的温度 |
| $temp_3$ | 小温区 7 的温度 |
| $temp_4$ | 小温区 8-9 的温度 |
| S | 217°C 以上炉温数据的偏度 |

四、模型的建立与求解

4.1 问题一

4.1.1 炉前区域分析

在附件所示的某次实验中，传送带过炉速度为 70cm/min，各温区温度的设定值分别为 175°C（小温区 1-5）、195°C（小温区 6）、235°C（小温区 7）、255°C（小温区 8-9）及 25°C（小温区 10-11）。

在回焊炉启动后，炉前区域的温度受到小温区 1 的影响，其温度 $v(x, t)$ 满足以下热传导方程：

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(x, 0) = 25 \\ v(0, t) = 25 \\ v(25, t) = 175 \end{cases}$$

其中 x 轴的原点位于炉前区域的左边界，正方向指向小温区 1，如图 1 所示。 $t = 0$ 指代回焊炉启动的时刻，此时炉前区域中各点的温度均为室温 25°C，即第二个方程所描述的内容；而在边界上，我们假定左边界保持室温 25°C，右边界保持小温区 1 的温度 175°C，即采用第一类边界条件。

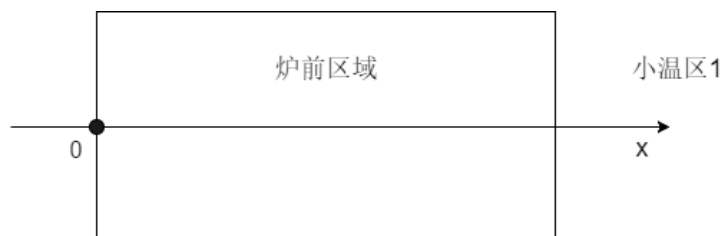


图 1 炉前区域示意图

求解此方程，我们令 $\tilde{v} = v - (6x + 25)$ ，则 \tilde{v} 满足方程

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - a^2 \tilde{v}_{xx} = 0 \\ \tilde{v}(x, 0) = -6x \\ \tilde{v}(0, t) = 0 \\ \tilde{v}(25, t) = 0 \end{cases}$$

该方程满足其次边界条件，我们可以得到其解为

$$\tilde{v}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 \left(\frac{k\pi}{25}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{25} x$$

其中

$$A_k = \frac{2}{25} \int_0^{25} -6\xi \sin \frac{k\pi}{25} \xi d\xi$$

由于题目中假设炉内空气温度会在短时间内达到稳定，我们可以认为这是 $t \rightarrow +\infty$ 时的状态，而

$$\tilde{v}(x, t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty$$

因此有

$$v(x, t) \rightarrow 6x + 25, \quad t \rightarrow +\infty$$

即距离炉前区域左边界 $x\text{cm}$ 处的空气在短时间内温度达到 $(6x + 25)^\circ\text{C}$ 。

4.1.2 温区间隙分析

对于小温区之间的间隙，其温度与相邻温区的温度有关，且在回焊炉启动后短时间内达到稳定。假设左温区的温度为 T_1 ，右温区的温度为 T_2 ，间隙温度为 $w(t, x)$ ，我们建立热传导方程对间隙温度进行分析， $w(t, x)$ 应满足以下方程：

$$\begin{cases} w_t - c^2 w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 25 \\ w|_{x=0} = T_1 \\ w|_{x=5} = T_2 \end{cases}$$

其中 $t = 0$ 位于回焊炉启动的时刻， x 轴原点位于间隙左侧边界，正方向指向右侧边界，如图 2 所示。



图 2 温区间隙示意图

将边界条件齐次化，我们令 $\tilde{w} = w - \left[\frac{T_2 - T_1}{5}x + T_1 \right]$ ，则 \tilde{w} 满足方程

$$\begin{cases} \tilde{w}_t - c^2 \tilde{w}_{xx} = 0 \\ \tilde{w}(x, 0) = 25 - \left[\frac{T_2 - T_1}{5}x + T_1 \right] \\ \tilde{w}|_{x=0} = 0 \\ \tilde{w}|_{x=5} = 0 \end{cases}$$

由于题目假设炉内空气温度会在短时间内达到稳定，我们需要考虑 $t \rightarrow +\infty$ 时的情形，而同炉前区域的分析可知， $\tilde{w}(x, t)$ 衰减地趋于零，因此

$$w(x, t) \rightarrow \frac{T_2 - T_1}{5}x + T_1, \quad t \rightarrow \infty$$

即距离温区间隙左边界 $x\text{cm}$ 处的空气在短时间内温度达到 $\left(\frac{T_2 - T_1}{5}x + T_1\right)^\circ\text{C}$ 。

基于该式也可以发现，当相邻温区温度相等，即 $T_1 = T_2$ 时，间隙的温度处处与相邻温区相同。

4.1.3 焊接区域分析

对于焊接区域，由于其有 0.15mm 的厚度，我们也需要通过热传导方程描述其温度的变化过程，设焊接区域进入回焊炉的时刻为 $t = 0$ ，设焊接区域（物体）的温度为 $u(x, t)$ ，其中 x 轴的原点位于焊接区域最低端，正方向指向上方。如图 3 所示。

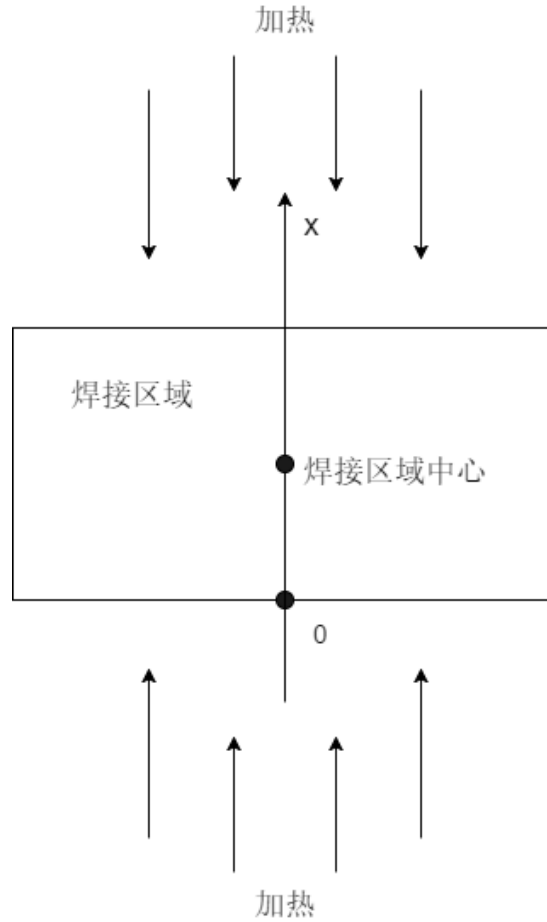


图 3 焊接区域示意图

由于我们能控制的是与焊接区域接触的小温区（介质）的温度 u_1 ，其与焊接区域表面的温度 u 往往并不相同，根据牛顿定律：从物体流到介质中的热量和两者的温度差成正比：

$$dQ = k_1(u - u_1)dxdt$$

其中 k_1 成为热交换系数，取正值。再由傅里叶定律，有

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} dxdt$$

因此

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} dx dt = k_1(u - u_1) dx dt$$

即

$$k_1 u + k \frac{\partial u}{\partial n} = k_1 u_1$$

由于此处是一维的情形，故有

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{x=0} = -u_x|_{x=0} \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{x=0.15} = u_x|_{x=0.15}$$

令 $h = \frac{k_1}{k}$ ，又对于在传送带上移动的电路板焊接区域来说，其面对的小温度的温度 u_1 是随时间变化的，且依赖于过炉速度，不妨令 $u_1 = f_s(t)$ ，其中 s 为过炉速度，则有

$$\begin{cases} u_t - b^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 25 \\ -u_x + hu|_{x=0} = hf_s(t) \\ u_x + hu|_{x=0.15} = hf_s(t) \end{cases} \quad (1)$$

在该方程中， b^2 和 h 是两个需要确定的系数，我们利用实验数据来推断出这两个系数的值。根据假设， h 与温度有关，我们认为它在炉前区域至小温区 5，小温区 5 至小温区 9，小温区 9 至炉后区域为三个不同的常数。根据上述推导，我们可以获得整个加热至冷却过程中焊接区域面对的温度，因此我们可以利用实验数据来反推系数 b^2 和 h 。

利用隐式差分将方程 (1) 离散化 [3]，有

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = b^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \\ -\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} = hf^n \\ \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} = hf^n \\ u_i^0 = 25 \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} -\lambda u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda)u_i^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1} = u_i^n \\ -\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} = hf^n \\ \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} = hf^n \\ u_i^0 = 25 \end{cases}$$

其中

$$\lambda = b^2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

其可化成方程组

$$\begin{pmatrix} 1+h\Delta x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1+h\Delta x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{m-1}^{n+1} \\ u_m^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ u_2^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{m-1}^n \\ u_m^n \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中 $\Delta x = 1\mu m$, $\Delta t = 0.001s$, $i = 0, 1, 2, \dots, 151$ 代表焊接区域厚度 $0.15mm$ 中的 151 个分点, $n = 1, 2, \dots, \frac{time}{\Delta t}$ 代表上述三段区域内的时间分点, $time$ 为通过某一区域所需的时间, 它与区域的长度和过炉速度有关, f^n 代表第 $n+1$ 个时间节点上所对应的炉前、后区域或小温区或温区间隙的温度。

当 b^2 和 h 已知时, 通过方程 (2) 可以计算出一组焊接区域中心温度的数据 (从 $t = 0$ 开始)。将该组数据与实验数据 (从 $t = 19$ 开始记录) 进行比对, 并计算公共部分的误差的平方和。以 $temp_j$ 代表计算出的数据, $temp_s$ 代表实验数据, Q 代表误差的平方和, 则

$$Q = \sum (temp_j - temp_s)^2$$

对于三段区域中的每一个, 我们尝试划定 b^2 和 h 的范围, 并取等距节点组合一个网格, 计算每个格点上的 Q 值, 通过寻找最小 Q 值所对应的格点, 来确定 b^2 和 h 的值。

以第一段区域为例 (炉前区域至小温区 5), 在第一次构造网格的过程中, 我们选取大范围以及大步长, 目的是粗略确定最优解的范围, 从而为接下来将网格细分做准备。取 b^2 以及 h 的范围为 0-500, 步长为 100, 得到最小 Q 值对应的格点为 ($b^2 = 100, h = 100$), 如图 4 所示。

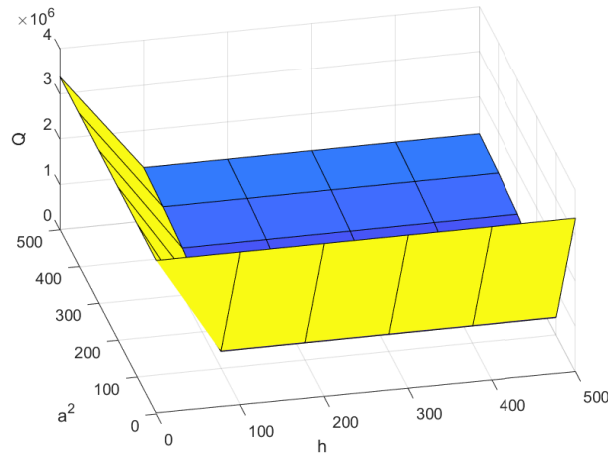


图 4 粗网格对应的 Q 值

经过几次细分，我们确定 b^2 的范围为 44.0–44.5，步长为 0.01； h 的范围为 9.2–9.3，步长为 0.01。由此我们得到最小 Q 值对应的格点为 ($b^2 = 44.32, h = 9.2$)，如图 5 所示。

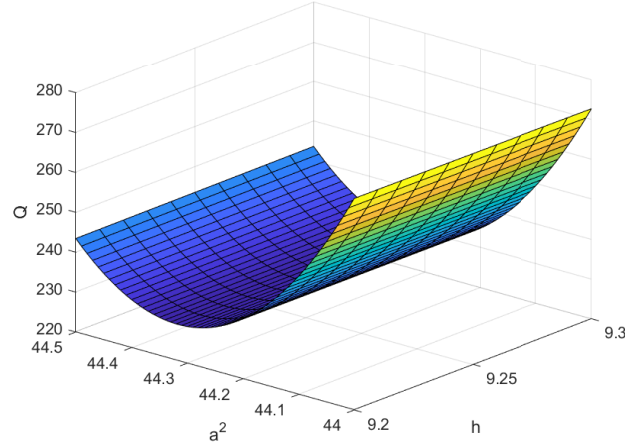


图 5 细网格对应的 Q 值

基于同样的原理，我们得到了第二段区域的 $b^2 = 95$ ， $h = 0.048$ ；第三段区域的 $b^2 = 35.4$ ， $h = 0.05$ 。即第一段区域内焊接区域的温度 $u(x, t)$ 满足方程

$$\begin{cases} u_t - 44.32u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 25 \\ -u_x + 9.2u|_{x=0} = 9.2f_s(t) \\ u_x + 9.2u|_{x=0.15} = 9.2f_s(t) \end{cases} \quad (3)$$

第二段区域内 $u(x, t)$ 满足方程

$$\begin{cases} u_t - 95u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \phi_s(x) \\ -u_x + 0.048u|_{x=0} = 0.048f_s(t) \\ u_x + 0.048u|_{x=0.15} = 0.048f_s(t) \end{cases} \quad (4)$$

其中初值 $\phi_s(x)$ 依赖于第一段区域的结果。第三段区域内 $u(x, t)$ 满足方程

$$\begin{cases} u_t - 35.4u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \psi_s(x) \\ -u_x + 0.05u|_{x=0} = 0.05f_s(t) \\ u_x + 0.05u|_{x=0.15} = 0.05f_s(t) \end{cases} \quad (5)$$

其中初值 $\psi_s(x)$ 依赖于第二段区域的结果。

将三段热传导方程利用隐式差分法离散化，在实验给定的条件下，我们可以计算出一个炉温曲线，其与实验记录的数据对比如下：

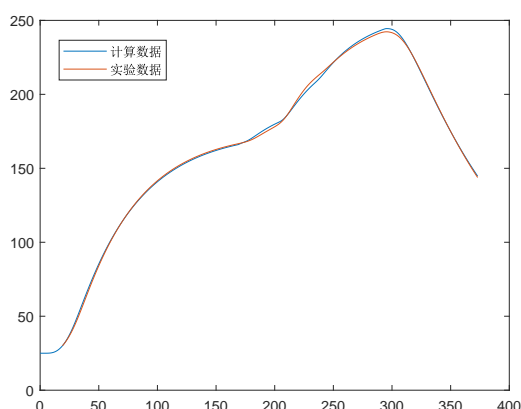


图 6 计算数据与实验数据的对比图

从图中可以看出我们的模型能较好地模拟温度的变化。

而基于第一问所给的条件，即传送带过炉速度为 78 cm/min ，各温区温度的设定值分别为 173°C （小温区 1–5）、 198°C （小温区 6）、 230°C （小温区 7）和 257°C （小温区 8–9），我们得到了如下的炉温曲线：

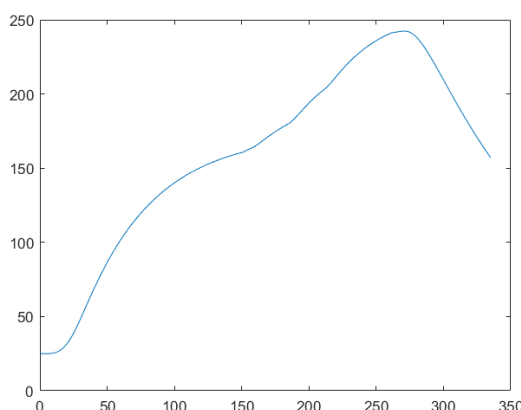


图 7 第一问条件下的炉温曲线

其中题目要求的时点处的温度如下表所示：

表 1 第一问中指定点处的温度

| 小温区 3 中点 | 小温区 6 中点 | 小温 7 中点 | 小温区 8 结束处 |
|------------|------------|------------|------------|
| 129.5290°C | 169.7739°C | 188.9019°C | 224.9341°C |

4.2 问题二

在问题二中，各温区温度的设定值分别为 182°C（小温区 1–5）、203°C（小温区 6）、237°C（小温区 7）、254°C（小温区 8–9），需要确定符合制程界限的最大过炉速度，其中制程界限如下表所示：

表 2 制程界限

| 界限名称 | 最低值 | 最高值 | 单位 |
|--------------------------|-----|-----|------|
| 温度上升斜率 | 0 | 3 | °C/s |
| 温度下降斜率 | -3 | 0 | °C/s |
| 温度上升过程中在 150°C–190°C 的时间 | 60 | 120 | s |
| 温度大于 217°C 的时间 | 40 | 90 | s |
| 峰值温度 | 240 | 250 | s |

设过炉速度为 s ，当 s 给定后 $f_s(t)$ 得以确定，从而可以通过方程 (3)、(4)、(5) 的隐式差分格式计算出一组离散的炉温数据。在离散的意义下，我们可以计算出温度上升斜率的最大值 $upslope_s$ 、温度下降斜率的最小值 $downslope_s$ 、温度上升过程中在 150°C–190°C 的时间 $time_{1s}$ 、温度大于 217°C 的时间 $time_{2s}$ 、峰值温度 $peaktemp_s$ ，它们都依赖于过炉速度 s 。

问题即化为

$$\begin{aligned}
 & \max s \\
 & s.t. \quad 0 \leq upslope_s \leq 3 \\
 & \quad \quad -3 \leq downslope_s \leq 0 \\
 & \quad \quad 60 \leq time_{1s} \leq 120 \\
 & \quad \quad 40 \leq time_{2s} \leq 90 \\
 & \quad \quad 240 \leq peaktemp_s \leq 250
 \end{aligned}$$

由于时间步长 $\Delta t = 0.001$ 取的足够小，我们可以用该离散的情形近似连续的情形，将过炉速度从 65cm/min 开始以 0.1cm/min 为步长取分点，直至 100cm/min，我们求得过炉速度的最大值约为 84.8cm/min。

4.3 问题三

在问题三中，各小温区的温度和传送带的过炉速度都需要自行确定，但要求炉温曲线满足制程界限，且炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小。

当所有小温区的温度确定时，过炉速度对面积的影响可从如下两个方面分析：一方面，提高过炉速度减少了所用的时间；另一方面，提高过炉速度降低了峰值温度 $peaktemp_s$ 。这两方面共同决定了当小温区温度确定时，过炉速度越快，面积越小。

因此我们可以将问题三转化为在给定小温区温度的前提下求最大过炉速度，这正是问题二的内容，因此我们可以借用问题二的解题方法。不同的是，在问题三中，我们还需要在给定范围内变动小温区温度，从而求得全局范围内的最大过炉速度。

这可以用如下的规划问题表示：

$$\begin{aligned}
 & \max s \\
 & s.t. \quad 0 \leq upslope_s \leq 3 \\
 & \quad \quad -3 \leq downslope_s \leq 0 \\
 & \quad \quad 60 \leq time_{1s} \leq 120 \\
 & \quad \quad 40 \leq time_{2s} \leq 90 \\
 & \quad \quad 240 \leq peaktemp_s \leq 250 \\
 & \quad \quad 165 \leq temp_1 \leq 185 \\
 & \quad \quad 185 \leq temp_2 \leq 205 \\
 & \quad \quad 225 \leq temp_3 \leq 245 \\
 & \quad \quad 245 \leq temp_4 \leq 265
 \end{aligned}$$

其中 $temp_1$ 为小温区 1–5 的温度， $temp_2$ 为小温区 6 的温度， $temp_3$ 为小温区 7 的温度， $temp_4$ 为小温区 8–9 的温度。

在求出最大的过炉速度 s 后，再利用其对应的小温区温度，我们即可通过热传导方程的隐式差分格式求出炉温曲线，如下图所示：

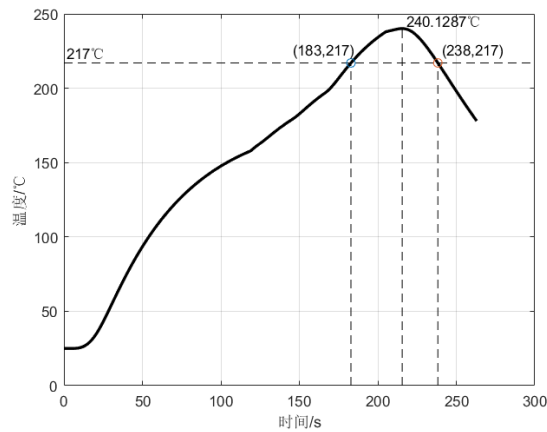


图 8 最小面积对应的炉温曲线

其中最小面积对应的温区温度分别如下表所示：

表 3 面积最小时各小温区温度

| 小温区 1-5 | 小温区 6 | 小温 7 | 小温区 8-9 |
|---------|---------|---------|---------|
| 180.8°C | 204.3°C | 225.0°C | 265.0°C |

对应的过炉速度为 99.3cm/min，此时的面积为 486.4012(s · °C)。

4.4 问题四

在问题四中，各温区的温度和传送带的过炉速度依旧需要自行确定，且要求炉温曲线满足制程界限，同时还希望以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称。

为了衡量对称性，我们利用偏度这个概念。

对于给定的小温区温度和过炉速度，我们可以计算出一组炉温数据，取其中 217°C 以上的数据，计算其偏度 S ，我们的目标是寻找全局的偏度绝对值最小点，可用如下规划问题描述：

$$\begin{aligned}
 & \min S \\
 & s.t. \quad 0 \leq upslope_s \leq 3 \\
 & \quad \quad -3 \leq downslope_s \leq 0 \\
 & \quad \quad 60 \leq time_{1s} \leq 120 \\
 & \quad \quad 40 \leq time_{2s} \leq 90 \\
 & \quad \quad 240 \leq peaktemp_s \leq 250 \\
 & \quad \quad 165 \leq temp_1 \leq 185 \\
 & \quad \quad 185 \leq temp_2 \leq 205 \\
 & \quad \quad 225 \leq temp_3 \leq 245 \\
 & \quad \quad 245 \leq temp_4 \leq 265 \\
 & \quad \quad 65 \leq s \leq 100
 \end{aligned}$$

通过划分网格并逐步加细，我们计算得当过炉速度为 92.1cm/min，且各小温区温度如下表所示时，偏度 S 的绝对值最小，此时的 $S = -0.1362$ 。

表 4 面积最小时各小温区温度

| 小温区 1-5 | 小温区 6 | 小温区 7 | 小温区 8-9 |
|---------|--------|--------|---------|
| 168.2℃ | 185.0℃ | 225.0℃ | 265.0℃ |

在该条件下，217℃ 以上的数据分布如下：

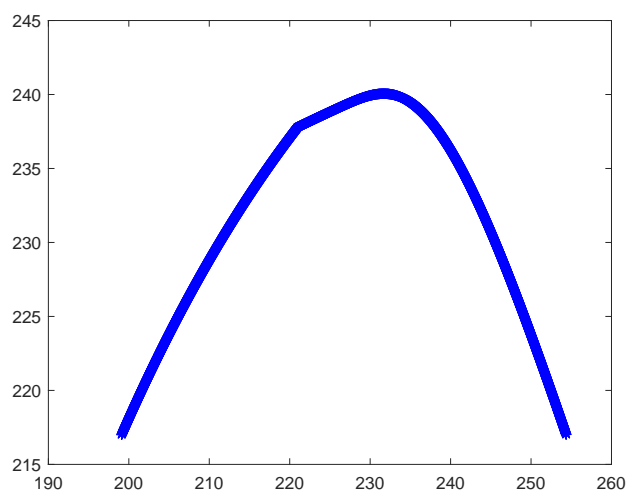


图 9 偏度最小时的炉温曲线片段

整条炉温曲线如下图所示：

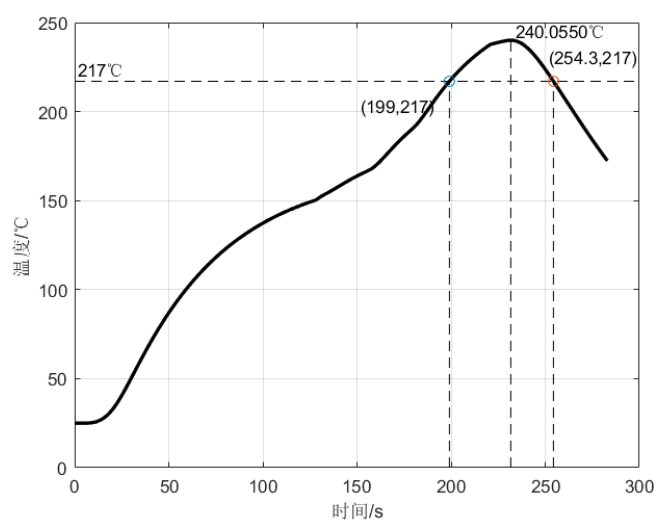


图 10 偏度最小时的炉温曲线

五、模型评价

5.1 优点

- 热传导偏微分方程能够反映真实的温度变化。
- 焊接区域的热传导方程使用的第三类边界条件符合实际物理原理。
- 对热传导方程使用的隐式差分格式稳定性好，不受步长的影响，且误差较小，为 $O(\Delta t) + O((\Delta x)^2)$ 。

5.2 不足

- 划分网格求最值的方法速度较慢，可继续改进。
- 焊接区域的热交换能力与温度相关，我们在一定的范围内认为它是一个常数，若做进一步改进，可以认为它是一个关于温度的连续函数。

参考文献

- [1] 汤宗健, 谢炳堂, 梁革英. 回流焊炉温曲线的管控分析 [J]. 电子质量, 2020(08): 15-19+23.
- [2] 程赞华, 许卫锋, 孟凯. 通孔回流焊 (PIP) 在 OSP 表面处理 PCB 无铅工艺中的应用 [J]. 电子质量, 2016(07): 48-54.
- [3] 谷超豪, 李大潜, 陈恕行等. 数学物理方程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2012: 186-188.
- [4] 陈文斌, 程晋, 吴新明等. 微分方程数值解 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 2014.

附录 A MATLAB 函数 heat1：返回第一段区域的炉温数据

```
function [u,U] = heat1(a2,h,T,F_vec,dt,dx,v)
%焊接区域经过炉前区域预热区恒温区部分（第一阶段）的偏微分程数值解++
t=floor(197.5/v);
n=t/dt;
m=150/dx;
s=a2*dt/dx^2;
vec1=(1+2*s)*ones(1+m,1);
vec1([1 end])=1+h*dx;
vec2=-s*ones(m+1,1);
vec2(2)=-1;
vec3=-s*ones(m+1,1);
vec3(end-1)=-1;
A=spdiags([vec1 vec2 vec3],[0 1 -1],m+1,m+1);
U=zeros(m+1,n+1);
b=zeros(m+1,1);
U(:,1)=T;
for i=2:n+1
b([1 end])=F_vec(i-1)*h*dx;
b(2:end-1)=U(2:end-1,i-1);
U(:,i)=A\b;
end
u=U(75/dx+1,:).'
```

附录 B MATLAB 函数 heat2：返回第二段区域的炉温数据

```
function [u,U] = heat2(a2,h,T,F_vec,dt,dx,v)
%焊接区域经过回流区部分（第二阶段）的偏微分程数值解
t=floor(339.5/v)-floor(197.5/v);
n=t/dt;
m=150/dx;
s=a2*dt/dx^2;
vec1=(1+2*s)*ones(1+m,1);
vec1([1 end])=1+h*dx;
vec1([1 end])=1;
```



```

vec2=-s*ones(m+1,1);
vec2(2)=-1;
vec2(2)=0;
vec3=-s*ones(m+1,1);
vec3(end-1)=-1;
vec3(end-1)=0;
A=spdiags([vec1 vec2 vec3],[0 1 -1],m+1,m+1);
U=zeros(m+1,n+1);
b=zeros(m+1,1);
U(:,1)=T;
for i=2:n+1
b([1 end])=F_vec(i-1)*h*dx;
b(2:end-1)=U(2:end-1,i-1);
U(:,i)=A\b;
end
u=U(75/dx+1,:)' ;

```

附录 C MATLAB 函数 heat3：返回第三段区域的炉温数据

```

function [u,U] = heat3(a2,h,T,F_vec,dt,dx,v)
%焊接区域经过冷却区炉后趋于部分（第三阶段）的偏微分程数值解+
t=floor(435.5/v)-floor(339.5/v);
n=t/dt;
m=150/dx;
s=a2*dt/dx^2;
vec1=(1+2*s)*ones(1+m,1);
vec1([1 end])=1+h*dx;
vec1([1 end])=1;
vec2=-s*ones(m+1,1);
vec2(2)=-1;
vec2(2)=0;
vec3=-s*ones(m+1,1);
vec3(end-1)=-1;
vec3(end-1)=0;
A=spdiags([vec1 vec2 vec3],[0 1 -1],m+1,m+1);
U=zeros(m+1,n+1);

```

```

b=zeros(m+1,1);
U(:,1)=T;
for i=2:n+1
b([1 end])=F_vec(i-1)*h*dx;
b(2:end-1)=U(2:end-1,i-1);
U(:,i)=A\b;
end
u=U(75/dx+1,:)' ;

```

附录 D MATLAB 脚本 parameter1: 确定第一段区域参数

```

%确认电路板热传导方程的参数（预热区）
clear
clc
load matlab.mat
T=25;
dt=0.001;
dx=1;
v=70/60;
x=(0:dt:169)*v;
F_vec=f(x);
da2=0.01;
dh=0.01;
a2=44:da2:44.5;
h=9.2:dh:9.3;
[~,M]=size(a2);
[~,N]=size(h);
AAA=zeros(M,N);
for k=1:M
for j=1:N
u =heat1(a2(k),h(j),T,F_vec,dt,dx,v);
u1=reshape(u(2:end),500,338);
u2=zeros(339,1);
u2(1)=u(1);
u2(2:339)=u1(500,:)' ;
u3=u2(39:end);

```

```

AAA(k,j)=sum((u3-Temp).^2);
end
end
[BBB,tmp]=min(AAA,[],'all','linear');
[tmp1,tmp2]=ind2sub(size(AAA),tmp);
X=da2*(tmp1-1)+a2(1)
Y=dh*(tmp2-1)+h(1)
BBB
surf(h,a2,AAA)

```

附录 E MATLAB 脚本 parameter2: 确定第二段区域参数

```

%确认电路板热传导方程的参数（回流区）
clear
clc
load matlab.mat
a2=44.32;
h=9.25;
T=25;
dt=0.001;
dx=1;
v=70/60;
x=(0:dt:169)*v;
F_vec1=f(x);
[uu,U]=heat1(a2,h,T,F_vec1,dt,dx,v);
T=U(:,end);
x=(169:dt:295)*v;
F_vec2=f(x);
db2=0.2;
dh2=0.001;
b2=93:db2:95;
h2=0:dh2:0.05;
[~,M]=size(b2);
[~,N]=size(h2);
AAA=zeros(M,N);
for k=1:M

```

```

for j=1:N
u = heat2(b2(k),h2(j),T,F_vec2,dt,dx,v);
u1=reshape(u(2:end),500,252);
u2=zeros(253,1);
u2(1)=u(1);
u2(2:253)=u1(500,:)' ;
u3=u2(1:end);
AAA(k,j)=sum((u3-temp(301:553)).^2);
end
end
uu1=[uu; u(2:end)];
u1=reshape(uu1(2:end),500,590);
u2=zeros(591,1);
u2(1)=uu1(1);
u2(2:591)=u1(500,:)' ;
[BBB,tmp]=min(AAA,[],'all','linear');
[tmp1,tmp2]=ind2sub(size(AAA),tmp);
X=db2*(tmp1-1)+b2(1)
Y=dh2*(tmp2-1)+h2(1)
BBB
surf(b2,h2,AAA')

```

附录 F MATLAB 脚本 parameter3：确定第三段区域参数

```

%确认电路板热传导方程的参数（冷却区）
clear
clc
load matlab.mat
a2=44.32;
h=9.25;
T=25;
dt=0.001;
dx=1;
v=70/60;
x=(0:dt:169)*v;
F_vec1=f(x);

```

```

[uu1,U1]=heat1(a2,h,T,F_vec1,dt,dx,v);
T1=U1(:,end);
x=(169:dt:295)*v;
F_vec2=f(x);
b2=95;
h2=0.048;
[uu2,U2] = heat2(b2,h2,T1,F_vec2,dt,dx,v);
T2=U2(:,end);
x=(295:dt:373)*v;
F_vec3=f(x);
dc2=0.1;
dh3=0.01;
c2=35:dc2:36;
h3=0:dh3:0.2;
[~,M]=size(c2);
[~,N]=size(h3);
AAA=zeros(M,N);
for k=1:M
for j=1:N
u = heat3(c2(k),h3(j),T2,F_vec3,dt,dx,v);
u1=reshape(u(2:end),500,156);
u2=zeros(157,1);
u2(1)=u(1);
u2(2:157)=u1(500,:)' ;
u3=u2(1:end);
AAA(k,j)=sum((u3-temp(553:709)).^2);
end
end
[BBB,tmp]=min(AAA,[],'all','linear');
[tmp1,tmp2]=ind2sub(size(AAA),tmp);
X=dc2*(tmp1-1)+c2(1)
Y=dh3*(tmp2-1)+h3(1)
BBB
surf(c2,h3,AAA')

```

附录 G MATLAB 脚本 question1: 返回问题一结果

```
%题目一求解（通过已确定的参数求解第一题的答案）
clear
clc
load matlab.mat
a2=44.32;
h1=9.25;
b2=95;
h2=0.048;
c2=35.4;
h3=0.05;
T=25;
T1=173;
T2=198;
T3=230;
T4=257;
T5=25;
f=@(x)((T1-T)/25.*x+T).*(x<=25)+T1.*(x>25&x<=197.5)+((T2-T1)/5.*...
(x-197.5)+T1).*(x>197.5&x<=202.5)+T2.*(x>202.5&x<=233)+((T3-T2)/5.*...
(x-233)+T2).*(x>233&x<=238)+T3.*(x>238&x<=268.5)+((T4-T3)/5.*...
(x-268.5)+T3).*(x>268.5&x<=273.5)+T4.*(x>273.5&x<=339.5)+((T5-T4)/5.*...
(x-339.5)+T4).*(x>339.5&x<=344.5)+T5.*(x>344.5&x<=435.5);
dt=0.001;
dx=1;
v=78/60;
t1=floor(197.5/v);
t2=floor(339.5/v);
t3=floor(435.5/v);
x1=(0:dt:t1)*v;
F_vec1=f(x1);
x2=(t1:dt:t2)*v;
F_vec2=f(x2);
x3=(t2:dt:t3)*v;
F_vec3=f(x3);
[uu1,U1]=heat1(a2,h1,T,F_vec1,dt,dx,v);
T1=U1(:,end);
```

```

[uu2,U2] = heat2(b2,h2,T1,F_vec2,dt,dx,v);
T2=U2(:,end);
[uu3,~] = heat3(c2,h3,T2,F_vec3,dt,dx,v);
uu=[uu1;uu2(2:end);uu3(2:end)];
N=(length(uu)-1)/500;
u1=reshape(uu(2:end),500,N);
u2=zeros(N+1,1);
u2(1)=uu(1);
u2(2:N+1)=u1(500,:)' ;
plot(0:0.5:(435.5/v),u2)

```

附录 H MATLAB 脚本 question2：返回问题二结果

```

%问题二求解（离散过炉速度以获得最佳的过炉速度）
clear
clc
load matlab.mat
a2=44.32;
h1=9.25;
b2=95;
h2=0.048;
c2=35.4;
h3=0.05;
T=25;
T1=182;
T2=203;
T3=237;
T4=254;
T5=25;
f=@(x)((T1-T)/25.*x+T).*(x<=25)+T1.*(x>25&x<=197.5)+((T2-T1)/5.*...
(x-197.5)+T1).*(x>197.5&x<=202.5)+T2.*(x>202.5&x<=233)+((T3-T2)/5.*...
(x-233)+T2).*(x>233&x<=238)+T3.*(x>238&x<=268.5)+((T4-T3)/5.*...
(x-268.5)+T3).*(x>268.5&x<=273.5)+T4.*(x>273.5&x<=339.5)+((T5-T4)/5.*...
(x-339.5)+T4).*(x>339.5&x<=344.5)+T5.*(x>344.5&x<=435.5);
dt=0.001;
dx=1;

```

```

vv=(65:0.1:100)/60;
n=length(vv);
for i=1:n
v=vv(i);
t1=floor(197.5/v);
t2=floor(339.5/v);
t3=floor(435.5/v);
x1=(0:dt:t1)*v;
F_vec1=f(x1);
x2=(t1:dt:t2)*v;
F_vec2=f(x2);
x3=(t2:dt:t3)*v;
F_vec3=f(x3);
[uu1,U1]=heat1(a2,h1,T,F_vec1,dt,dx,v);
T1=U1(:,end);
[uu2,U2] = heat2(b2,h2,T1,F_vec2,dt,dx,v);
T2=U2(:,end);
[uu3,~] = heat3(c2,h3,T2,F_vec3,dt,dx,v);
uu=[uu1;uu2(2:end);uu3(2:end)];
N=length(uu);
UU(1:N,i)=uu;
end
[~,n]=size(UU);
QQ=ones(1,n);
dt=0.001;
for i=1:n
k=find(UU(:,i),1,'last');
uu=UU(1:k,i);
K=diff(uu)/dt;
tmp1=logical(uu>=150 & uu<=190);
sum1=sum(tmp1)*dt;
tmp2=logical(uu>217);
sum2=sum(tmp2)*dt;
if max(K)>3 || min(K)<-3
QQ(i)=0;
elseif sum1<60 || sum1>120
QQ(i)=0;

```



```

elseif sum2<40 || sum2>90
QQ(i)=0;
elseif max(uu)<240 || max(uu)>250
QQ(i)=0;
end
end
X=65:0.1:100;
QQ=logical(QQ);
U=X(QQ);
u=max(U);

```

附录 I MATLAB 脚本 question3：返回问题三结果

```

%题目三求解
clear
clc
load matlab.mat
a2=44.32;
h1=9.25;
b2=95;
h2=0.048;
c2=35.4;
h3=0.05;
T=25;
T1=108.8;
T2=204.3;
T3=225;
T4=265;
T5=25;
f=@(x)((T1-T)/25.*x+T).*(x<=25)+T1.*(x>25&x<=197.5)+((T2-T1)/5.*...
(x-197.5)+T1).*(x>197.5&x<=202.5)+T2.*(x>202.5&x<=233)+((T3-T2)/5.*...
(x-233)+T2).*(x>233&x<=238)+T3.*(x>238&x<=268.5)+((T4-T3)/5.*...
(x-268.5)+T3).*(x>268.5&x<=273.5)+T4.*(x>273.5&x<=339.5)+((T5-T4)/5.*...
(x-339.5)+T4).*(x>339.5&x<=344.5)+T5.*(x>344.5&x<=435.5);
dt=0.001;
dx=1;

```

```

vv=(65:1:100)/60;
n=length(vv);
for i=1:n
v=vv(i);
t1=floor(197.5/v);
t2=floor(339.5/v);
t3=floor(435.5/v);
x1=(0:dt:t1)*v;
F_vec1=f(x1);
x2=(t1:dt:t2)*v;
F_vec2=f(x2);
x3=(t2:dt:t3)*v;
F_vec3=f(x3);
[uu1,U1]=heat1(a2,h1,T,F_vec1,dt,dx,v);
T1=U1(:,end);
[uu2,U2] = heat2(b2,h2,T1,F_vec2,dt,dx,v);
T2=U2(:,end);
[uu3,~] = heat3(c2,h3,T2,F_vec3,dt,dx,v);
uu=[uu1;uu2(2:end);uu3(2:end)];
N=length(uu);
UU(1:N,i)=uu;
end
%求解最快过炉速度
[~,n]=size(UU);
QQ=ones(1,n);
dt=0.001;
for i=1:n
k=find(UU(:,i),1,'last');
uu=UU(1:k,i);
K=diff(uu)/dt;
tmp1=logical(uu>=150 & uu<=190);
sum1=sum(tmp1)*dt;
tmp2=logical(uu>217);
sum2=sum(tmp2)*dt;
if max(K)>3 || min(K)<-3
QQ(i)=0;
elseif sum1<60 || sum1>120

```

```

QQ(i)=0;
elseif sum2<40 || sum2>90
QQ(i)=0;
elseif max(uu)<240 || max(uu)>250
QQ(i)=0;
end
end
X=65:1:100;
QQ=logical(QQ);
U=X(QQ);
u=max(U);
v=u/60;
t1=floor(197.5/v);
t2=floor(339.5/v);
t3=floor(435.5/v);
x1=(0:dt:t1)*v;
F_vec1=f(x1);
x2=(t1:dt:t2)*v;
F_vec2=f(x2);
x3=(t2:dt:t3)*v;
F_vec3=f(x3);
[uu1,U1]=heat1(a2,h1,T,F_vec1,dt,dx,v);
T1=U1(:,end);
[uu2,U2] = heat2(b2,h2,T1,F_vec2,dt,dx,v);
T2=U2(:,end);
[uu3,~] = heat3(c2,h3,T2,F_vec3,dt,dx,v);
uu=[uu1;uu2(2:end);uu3(2:end)];
k1=find(uu>217,1);
[~,k2]=max(uu);
Smin=sum((uu(k1:k2)-217)*dt)
u

```

附录 J MATLAB 脚本 question4: 返回问题四结果

```

%题目四求解
clear

```

```

clc
load matlab.mat
a2=44.32;
h1=9.25;
b2=95;
h2=0.048;
c2=35.4;
h3=0.05;
T=25;
T1=168.2;
T2=185;
T3=225;
T4=265;
T5=25;
f=@(x)((T1-T)/25.*x+T).*(x<=25)+T1.*(x>25&x<=197.5)+((T2-T1)/5.*...
(x-197.5)+T1).*(x>197.5&x<=202.5)+T2.*(x>202.5&x<=233)+((T3-T2)/5.*...
(x-233)+T2).*(x>233&x<=238)+T3.*(x>238&x<=268.5)+((T4-T3)/5.*...
(x-268.5)+T3).*(x>268.5&x<=273.5)+T4.*(x>273.5&x<=339.5)+((T5-T4)/5.*...
(x-339.5)+T4).*(x>339.5&x<=344.5)+T5.*(x>344.5&x<=435.5);
dt=0.001;
dx=1;
vv=(65:0.1:100)/60;
n=length(vv);
for i=1:n
v=vv(i);
t1=floor(197.5/v);
t2=floor(339.5/v);
t3=floor(435.5/v);
x1=(0:dt:t1)*v;
F_vec1=f(x1);
x2=(t1:dt:t2)*v;
F_vec2=f(x2);
x3=(t2:dt:t3)*v;
F_vec3=f(x3);
[uu1,U1]=heat1(a2,h1,T,F_vec1,dt,dx,v);
T1=U1(:,end);
[uu2,U2] = heat2(b2,h2,T1,F_vec2,dt,dx,v);

```

```

T2=U2(:,end);
[uu3,~] = heat3(c2,h3,T2,F_vec3,dt,dx,v);
uu=[uu1;uu2(2:end);uu3(2:end)];
N=length(uu);
UU(1:N,i)=uu;
end
%求解对称性最好的参数
[~,n]=size(UU);
QQ=ones(1,n);
dt=0.001;
S=nan(1,n);
for i=1:n
k=find(UU(:,i),1,'last');
uu=UU(1:k,i);
K=diff(uu)/dt;
tmp1=logical(uu>=150 & uu<=190);
sum1=sum(tmp1)*dt;
tmp2=logical(uu>217);
sum2=sum(tmp2)*dt;
if max(K)>3 || min(K)<-3
QQ(i)=0;
elseif sum1<60 || sum1>120
QQ(i)=0;
elseif sum2<40 || sum2>90
QQ(i)=0;
elseif max(uu)<240 || max(uu)>250
QQ(i)=0;
else
k1=find(uu>217,1);
k2=find(uu>217,1,'last');
TMP=uu(k1:k2);
[umax,k3]=max(uu);
TMP=TMP-umax;
TMP(1:k3-k1)=-TMP(1:k3-k1);
S(i)=skewness(TMP);
end
end

```

```
[~,tmp]=min(abs(S));  
s=S(tmp)  
u=65+(tmp-1)*0.1
```